UNICAMP vestibular 2015

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 1

a)
Sejam l, m, g e v as quantidades de infrações leves, médias, graves e gravíssimas, respectivamente. Assim, devemos ter que $3l + 4m + 5g + 7v = 13$. Claramente, $v = 1$ ou $v = 0$. Se $v = 1$, então $3l + 4m + 5g = 6$, cuja única solução é $l = 2$, $m = 0$ e $g = 0$. Se $v = 0$, então $3l + 4m + 5g = 13$ e, portanto, $g = 2$ ou $g = 1$ ou $g = 0$. Se $g = 2$ então, $3l + 4m = 3$, cuja única solução é $l = 1$ e $m = 0$. Se $g = 1$, então $3l + 4m = 8$, cuja única solução é $l = 0$ e $m = 2$. Finalmente, se $g = 0$, então $3l + 4m = 13$, cuja única solução é $l = 3$ e $m = 1$. Concluindo, as possíveis soluções para as quantidades de infrações (l, m, g, v) são $(2,0,0,1)$, $(1,0,2,0)$, $(0,2,1,0)$ e $(3,1,0,0)$.

b)
Em 1.000 infrações, a soma das multas aplicadas é dada por $1.000 \times \left(\frac{10}{100} \times 53 + \frac{40}{100} \times 86 + \frac{20}{100} \times 128 + \frac{30}{100} \times 192\right) = 100 \times (53 + 4 \times 86 + 2 \times 128 + 3 \times 192) = 122.900$. Portanto, é uma soma de $R\$$ 122.900,00.

Questão 2

a)
Temos que $f(x)g(x) = (ax + 3a)(9 - 2x) = a(x + 3)(9 - 2x)$. Como $a > 0$, para que $f(x)g(x) > 0$, os termos $x + 3$ e $9 - 2x$ devem ter o mesmo sinal. Se $x + 3 < 0$ e $9 - 2x < 0$, obtemos $x < -3$ e $x > 9/2$, o que é impossível. Se $x + 3 > 0$ e $9 - 2x > 0$, obtemos $x > -3$ e $x < 9/2$. Os valores inteiros de x que satisfazem ambas as desigualdades são $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ e 4, determinando um número de soluções inteiras igual a 7.

b)
Temos que $f(g(x)) = a(9 - 2x) + 3a = 12a - 2ax$ e $g(f(x)) = 9 - 2(ax + 3a) = 9 - 6a - 2ax$.Logo, $f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow 12a - 2ax = 9 - 6a - 2ax \Leftrightarrow 12a = 9 - 6a \Leftrightarrow 18a = 9 \Leftrightarrow a = 1/2$.

Questão 3

a)
Calculando o valor da função no ponto indicado, temos:

$f(\log_{10}(2 + \sqrt{3})) = 10^{1+\log_{10}(2+\sqrt{3})} + 10^{1-\log_{10}(2+\sqrt{3})} = 10(10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})} + 10^{-\log_{10}(2+\sqrt{3})}) = 10(10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})} + (10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})})^{-1}) = 10\left(2 + \sqrt{3} + \left(2 + \sqrt{3}\right)^{-1}\right) = 10\left(2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = 10(2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = 40$. Portanto, $f(\log_{10}(2 + \sqrt{3}))$ é um número inteiro.

a)
Denotando $y = 10^x$, temos que $f(x) = 52 \Leftrightarrow 10(y + y^{-1}) = 52 \Leftrightarrow 10y^2 + 10 = 52y \Leftrightarrow 10y^2 - 52y + 10 = 0$. O valor do discriminante dessa equação quadrática é $\Delta = 52^2 - 400 = 2304$ e $\sqrt{2304} = 48$. Portanto, $y = \frac{52-48}{20} = \frac{1}{5}$ ou $y = \frac{52+48}{20} = 5$. Logo, $10^x = \frac{1}{5}$ ou $10^x = 5$, implicando $x = \log_{10}\frac{1}{5} = -\log_{10} 5$ ou $x = \log_{10} 5$. Como $\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$, concluímos que $x \approx -0.7$ ou $x \approx 0.7$.

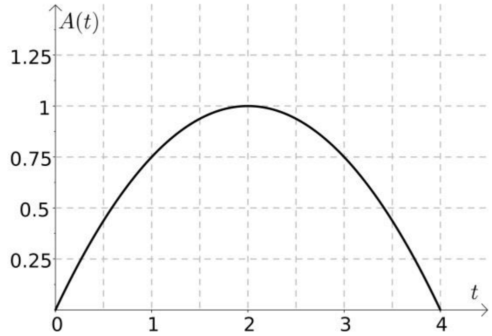
UNICAMP vestibular 2015

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 4

a)

Seja $P = (t, u)$. Como P está sobre a reta r, temos $t + 2u = 4$, ou seja, $u = (4 - t)/2$. A partir da figura, temos que a área do triângulo T, para $0 < t < 4$, é dada por $A(t) = \frac{1}{2} t \times u = t(4 - t)/4 = t - t^2/4$. Portanto, $A(t)$ é uma função quadrática, cujo gráfico é um segmento de parábola entre $t = 0$ e $t = 4$, com a concavidade voltada para baixo e vértice no ponto de coordenadas $(2,1)$, conforme a figura abaixo.



b)

A reta r pode ser vista como o gráfico da função $f(x) = (4 - x)/2$, definida para todo número real x. Assim, o gráfico da função g tem somente um ponto em comum com a reta r se, e somente se, a equação $\frac{k}{x} = \frac{4-x}{2}$ tem solução única. A equação anterior é equivalente a $2k = 4x - x^2$, ou seja, $x^2 - 4x + 2k = 0$. Essa equação quadrática tem solução única se, e somente se, o discriminante é nulo. Logo, $\Delta = 4^2 - 8k = 0 \Leftrightarrow 8k = 16 \Leftrightarrow k = 2$.

Questão 5

a)

Como (a, b, c, d) é uma PG, temos que $b = aq$, $c = aq^2$ e $d = aq^3$.

Logo, $p\left(-\frac{1}{q}\right) = a - \frac{b}{q} + \frac{c}{q^2} - \frac{d}{q^3} = a - a + a - a = 0$.

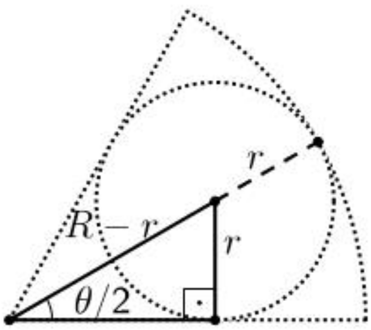
b)

O sistema linear indicado tem solução única se, e somente se, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ é diferente de zero. Logo, $\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = ab - cd \neq 0 \Leftrightarrow a^2q - a^2q^5 \neq 0 \Leftrightarrow a^2q(1 - q^4) \neq 0$. Portanto, $a \neq 0$, $q \neq 0$ (já assumido no enunciado) e $q^4 \neq 1$, ou seja, $q \neq -1$ e $q \neq 1$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 6

a)
A área do círculo é dada por $A_C = \pi r^2$ e a do setor circular, considerando que $\theta = 60^o = \pi/3$ radianos, é dada por $A_S = \frac{1}{2}\theta R^2 = \frac{\pi}{6}R^2$. A partir da figura abaixo, temos que $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{r}{R-r}$, ou seja, $\sin 30^o = \frac{1}{2} = \frac{r}{R-r}$ e, portanto, $R = 3r$. Logo, a razão entre as áreas é igual a $\frac{A_C}{A_S} = \frac{\pi r^2}{\frac{\pi}{6}R^2} = \frac{6r^2}{R^2} = \frac{6r^2}{9r^2} = \frac{2}{3}$.



b)
Novamente, a partir da figura acima, temos que $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{r}{R-r} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$.

Logo, $\cos\theta = \cos(2\frac{\theta}{2}) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - 2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.